

УДК 517.911.5

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ, НЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ УСЛОВИЯМ КАРАТЕОДОРИ

© Е.А. Панасенко

Ключевые слова: дифференциальное включение с правой частью, не удовлетворяющей условиям Каратеодори; задача Коши.

В работе рассматриваются условия разрешимости задачи Коши для дифференциального включения, правая часть которого порождается многозначным отображением, не обязательно удовлетворяющим условиям Каратеодори. Предложен метод, позволяющий свести такую задачу к задаче для дифференциального включения с «хорошей» правой частью.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

где $F: [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ — многозначное отображение с образами, которые являются подмножествами $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор.

Под решением задачи (1), (2), определенным на интервале $[t_0, t_0 + \tau]$, $\tau > 0$, будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x: [t_0, t_0 + \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$, отвечающую начальному условию (2) и удовлетворяющую почти всюду на $[t_0, t_0 + \tau]$ включению (1). Такое решение называют решением Каратеодори, если многозначное отображение F удовлетворяет соответствующим условиям Каратеодори, то есть является измеримым по первому аргументу и непрерывным (полу непрерывным сверху или снизу) по второму аргументу. В данной работе мы не накладываем подобных условий на отображение F , более того, считаем, что образами F могут выступать любые подмножества пространства $\mathbb{R}^n$. Чтобы получить утверждение о разрешимости задачи (1), (2) в подобной ситуации, мы введем в рассмотрение вспомогательные отображения, что позволит перейти от исходной задачи к задаче для дифференциального включения, обладающего некоторыми «хорошими» свойствами.

Обозначим через $S(u, r) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x - u| = r\}$, $B(u, r) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x - u| \leq r\}$ сферу и, соответственно, замкнутый шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в точке u ; $\varrho(x, M) \doteq \inf_{y \in M} |x - y|$ — расстояние в $\mathbb{R}^n$ от точки x до множества M ; $d(M_1, M_2) \doteq \sup_{x \in M_1} \varrho(x, M_2)$ — полуотклонение по Хаусдорфу множества M_1 от M_2 ; $\text{dist}(M_1, M_2) = \max\{d(M_1, M_2); d(M_2, M_1)\}$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами M_1, M_2 ; $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех непустых замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а 1. Пусть существуют $t_1 > t_0$, отображения $\mathcal{A}, \mathcal{B}: [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, и суммируемые функции $R_0: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\theta: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что для отображений $\tilde{F}: [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ и $G: [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, определенных, соответственно, равенствами

$$\tilde{F}(t, x) \doteq (F(t, x) \cap \mathcal{A}(t, x)) \cup \mathcal{B}(t, x),$$

$$G(t, p) \doteq \tilde{F}(t, x^*(t) + p),$$

где $x^*(t) \doteq x_0 + \int_{t_0}^t \theta(s)ds$, $t \in [t_0, t_1]$, выполнены следующие условия:

- 1) при н.в. $t \in [t_0, t_1]$ и любом $x \in B\left(x^*(t), \int_{t_0}^t R_0(s)ds\right)$ множество $\mathcal{B}(t, x)$ либо пусто, либо $\varrho(\theta(t), \mathcal{B}(t, x)) \geq R_0(t)$;
- 2) имеет место неравенство

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in [t_0, t_1]} \frac{\varrho(\theta(t), \tilde{F}(t, x^*(t)))}{R_0(t)} < 1;$$

- 3) отображение $G(\cdot, p) : [t_0, t_1] \rightarrow \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ измеримо для любого $p \in B(0, \delta)$, где $\delta \doteq \int_{t_0}^{t_1} R_0(s)ds$;

- 4) существует суммируемая функция $k : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что функция $\nu : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+$, определенная равенством $\nu(t) \doteq k(t)/R_0(t)$, является существенно ограниченной, и при н.в. $t \in [t_0, t_1]$ справедлива оценка

$$\operatorname{dist}(G(t, p_1), G(t, p_2)) \leq k(t)|p_1 - p_2| \quad \forall p_1, p_2 \in B(0, \delta).$$

Тогда найдется такое $\tau > 0$, что задача (1), (2) имеет решение, определенное на отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$.

Идея доказательства этого утверждения заключается в применении принципа неподвижной точки, полученного в [1] (см. также [2]). Частный случай теоремы 1, когда отображения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ определялись равенствами

$$\mathcal{A}(t, x) \doteq B(\theta(t), R_0(t)),$$

$$\mathcal{B}(t, x) \doteq S(\theta(t), R_0(t)),$$

рассматривался в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Zhukovskiy E. S., Panasenکو E. A. On multi-valued maps with images in the space of closed subsets of a metric space // Fixed Point Theory and Applications 2013, 2013:10, doi:10.1186/1687-1812-2013-10.
2. Zhukovskiy E. S., Panasenکو E. A. On fixed points of multi-valued maps in metric spaces and differential inclusions // Bulletin of Udmurt University. Mathematics, Mechanics, Computer Science, 2013, no. 2, pp. 12-26.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-01-00645).

Panasenko E.A. CAUCHY PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL INCLUSION WITH NOT NECESSARILY CARATHEODORY RIGHT-HAND SIDE

Conditions of solvability of the Cauchy problem for a differential inclusion with the right-hand side not necessarily satisfying the Caratheodory conditions are under discussion. A technique which allows to reduce such a problem to that for a differential inclusion with «good» right-hand side is considered.

Key words: differential inclusion with not necessarily Caratheodory right-hand side; Cauchy problem.